TÍCH PHÂN

I.CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Tính tích phân bằng định nghĩa ,tính chất và bảng nguyên hàm cơ bản

2.Phương pháp tích phân từng phần.

Định lí . Nếu u(x) và v(x) là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $\left[a;b\right]$ thì:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

$$\text{hay } \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu .$$

Áp dụng công thức trên ta có qui tắc công thức tích phân từng phần sau:

- Bước 1: Viết f(x)dx dưới dạng $udv = uv'dx$ bằng cách chọn một phần thích hợp của f(x) làm u(x) và phần còn lại $dv = v'(x)dx.$
- Bước 2: Tính $du = u'dx$ và $v = \int dv = \int v'(x)dx$.
- Bước 3: Tính $\int_a^b vdu = \int_a^b vu'dx$ và $uv\Big|_a^b$.
- Bước 5: Áp dụng công thức trên.

Ví dụ 5: a)Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$ (ĐH-KB-2009)

$$I = \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx = 3\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)^2} + \int_1^3 \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$$

$$I_1 = 3\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)}\Big|_1^3 = \frac{3}{4}$$

$$I_2 = \int_1^3 \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$$

Đặt u = lnx $\Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$. Chọn $v = \frac{-1}{x+1}$

$$I_2 = -\frac{\ln x}{x+1}\Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{\ln 3}{4} + \int_1^3 \frac{dx}{x} - \int_1^3 \frac{dx}{x+1} = -\frac{\ln 3}{4} + \ln\frac{3}{2}$$

Vậy : $I = \frac{3}{4}(1+\ln 3) - \ln 2$

b) Tính $\int_1^e x\ln x dx$

Giải: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\int_1^e x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$$

Ví dụ 6: Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$ c) $\int_0^1 xe^x dx$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos xdx$

Giải: a) Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{1}{x^5}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = -\dfrac{1}{4x^4} \end{cases}$. Do đó:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx = -\frac{\ln x}{4x^4}\Big|_1^2 + \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{dx}{x^5} = -\frac{\ln 2}{64} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4x^4}\right)\Big|_1^2 = \frac{15-4\ln 2}{256}.$$

b) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$. Do đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx = \left(x\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

c)Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$. Do đó:

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - \left(e-1\right) = 1.$$

d) Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx.$$

Đặt $\begin{cases} u_1 = e^x \\ dv_1 = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = e^x dx \\ v_1 = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} + e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx.$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}.$$

*Cách đặt u và dv trong phương pháp tích phân từng phần.

	$\int_a^b P(x)e^x dx$	$\int_a^b P(x)\ln x dx$	$\int_a^b P(x)\cos x dx$	$\int_a^b e^x \cos x dx$
u	P(x)	lnx	P(x)	e^x
dv	$e^x dx$	P(x)dx	cosxdx	cosxdx

Chú ý: Điều quan trọng khi sử dụng công thức tích phân từng phần là làm thế nào để chọn u và $dv = v^{'}dx$ thích hợp trong biểu thức dưới dấu tích phân f(x)dx. Nói chung nên chọn u là phần của f(x) mà khi lấy đạo hàm thì đơn giản, chọn $dv = v^{'}dx$ là phần của f(x)dx là vi phân một hàm số đã biết hoặc có nguyên hàm dễ tìm.

Có ba dạng tích phân thường được áp dụng tích phân từng phần:

- Nếu tính tích phân $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)Q(x)dx$ mà P(x)là đa thức chứa x và Q(x) là một trong những hàm số: e^{ax}, $\cos ax$, $\sin ax$ thì ta thường đặt

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = Q(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \int Q(x)dx \end{cases}$$

- Nếu tính tích phân $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)Q(x)dx$ mà P(x) là đa thức của x và Q(x) là hàm số ln(ax) thì ta đặt $\begin{cases} u = Q(x) \\ dv = P(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = Q'(x)dx \\ v = \int P(x)dx \end{cases}$

- Nếu tính tích phân $I = \int_{\alpha}^{\beta} e^{ax} \cos bx dx$ hoặc $J = \int_{\alpha}^{\beta} e^{ax} \sin bx dx$ thì

ta đặt $\begin{cases} u = e^{ax} \\ dv = \cos bx dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ae^{ax}dx \\ v = \frac{1}{b}\sin bx \end{cases}$

hoặc đặt $\begin{cases} u = e^{ax} \\ dv = \sin bx dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ae^{ax}dx \\ v = -\frac{1}{b}\cos bx \end{cases}$

Trong trường hợp này, ta phải tính tích phân từng phần hai lần sau đó trở thành tích phân ban đầu. Từ đó suy ra kết quả tích phân cần tính.

3. Phương pháp đổi biến số

Bài toán: Tính $I = \int_{a}^{b} f(x)dx$,

****Phương pháp đổi biến dạng I***

Định lí . Nếu 1) Hàm $x = u(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$,

2) Hàm hợp $f(u(t))$ được xác định trên $[\alpha; \beta]$,

3) $u(\alpha) = a, u(\beta) = b$,

thì $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u^{'}(t)dt$.

Ví dụ 1. Hãy tính các tích phân sau:

a) Tính tích phân $\mathbf{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x - 1\right)\cos^2 x.dx}$ (ĐH-KA-2009)

b) $I = \int_0^1 x^2\sqrt{x^3+5}dx$ c) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 x + 1\right)\cos x dx$

Giải: a) I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x.dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.dx$

Ta có: I_2 = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x).dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

Mặt khác xét I_1 = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x.\cos x.dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \left(\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}$

Vậy I = $I_1 - I_2$ = $\frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$

b) Ta có $d\left(x^3+5\right) = 3x^2dx \Rightarrow \frac{d\left(x^3+5\right)}{3} = x^2dx$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \sqrt{x^3+5}\,\frac{d\left(x^3+5\right)}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x^3+5\right)^{\frac{1}{2}} d(x^3+5) = \frac{1}{3}\frac{(x^3+5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{9}(x^3+5)\sqrt{x^3+5}\,\Big|_0^1$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{6} - \frac{10}{9}\sqrt{5}.$$

c) Ta có $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x+1)d(\sin x) \;=\left(\frac{1}{5}\sin^5 x+\sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{6}{5}$

Ví dụ 2. Hãy tính các tích sau:

a) $\int_0^4\sqrt{4-x^2}dx$ b) $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$

Giải: a) Đặt $x=2\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Khi x = 0 thì t = 0. Khi $x=2$ thì $t=\frac{\pi}{2}$.

Từ $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos tdt$

$$\int_0^4\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\pi.$$

b) Đặt $x=\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Khi $x=0$ thì $t=0$, khi $x=1$ thì $t=\frac{\pi}{4}$.

Ta có: $x=\tan t\Rightarrow dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$.

$$\Rightarrow\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2 t}.\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}.$$

Chú ý: Trong thực tế chúng ta có thể gặp dạng tích phân trên dạng tổng quát hơn như:

Nếu hàm số dưới dấu tích phân có chứa căn dạng $\sqrt{a^2+x^2},\sqrt{a^2-x^2}$ và $\sqrt{x^2-a^2}$ (trong trong đó a là hằng số dương) mà không có cách biến đổi nào khác thì nên đổi sang các hàm số lượng giác để làm mất căn thức, cụ thể là:

- Với $\sqrt{a^2-x^2}$, đặt $x=a\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

  hoặc $x=a\cos t,\ t\in[0;\pi]$.

- Với $\sqrt{a^2+x^2}$, đặt $x=a\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

  hoặc $x=a\cot t,\ t\in(0;\pi)$.

- Với $\sqrt{x^2-a^2}$, đặt $x=\dfrac{a}{\sin t},\quad t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\backslash\{0\}$

hoặc $x=\dfrac{a}{\cos t};\quad t\in[0;\pi]\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

***Phương pháp đổi biến dạng II**

***Định lí** :* Nếu hàm số $u=u(x)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho

$f(x)dx=g(u(x))u'(x)dx=g(u)du$ thì $I=\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$.

Ví dụ 3: Tính $I=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{x^3+5}dx$

Giải: Đặt $u(x)=x^3+5$.Tacó $u(0)=5, u(1)=6$.

Từ đó được: $I=\dfrac{1}{3}\int\limits_5^6\sqrt{u}du=\dfrac{2}{9}u\sqrt{u}\Big|_5^6=\dfrac{2}{9}\left(6\sqrt{6}-5\sqrt{5}\right)=\dfrac{4}{9}\sqrt{6}-\dfrac{10}{9}\sqrt{5}$

Ví dụ 4: Hãy tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến dạng II:

a) $\int\limits_0^1(2x+1)^5dx$ b) $\int\limits_e^{e^2}\dfrac{dx}{x\ln x}$ c) $\int\limits_0^1\dfrac{4x+2}{x^2+x+1}dx$

d) $\int\limits_1^2\dfrac{dx}{(2x-1)^2}$ e) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\cos(3x-\dfrac{2\pi}{3})dx$

Giải: a) Đặt $u=2x+1$ khi $x=0$ thì $u=1$. Khi $x=1$ thì $u=3$

Ta có $du=2dx\Rightarrow dx=\dfrac{du}{2}$. Do đó:

$\int\limits_0^1(2x+1)^5dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3u^5du=\dfrac{u^6}{12}\Big|_1^3=\dfrac{1}{12}(3^6-1)=60\dfrac{2}{3}$.

b)Đặt $u=\ln x$. Khi $x=e$ thì $u=1$. Khi $x=e^2$ thì $u=2$.

Ta có $du = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \int_{e}^{e^2} \dfrac{dx}{x\ln x} = \int_{1}^{2} \dfrac{du}{u} = \ln u \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

c)Đặt $u = x^2 + x + 1$. Khi $x = 0$ thì $u = 1$. Khi $x = 1$ thì $u = 3$.

Ta có $du = (2x+1)dx$. Do đó:

$$\int_0^1 \frac{4x+2}{x^2+x+1}dx = \int_1^3 \frac{2du}{u} = 2\ln u \Big|_1^3 = 2(\ln 3 - \ln 1) = 2\ln 3.$$

d)Đặt $u = 2x - 1$. Khi $x = 1$thì $u = 1$. Khi $x = 2$ thì $u = 3$.

Ta có $du = 2dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2}$. Do đó:

$$\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u}\Big|_1^3 = -\frac{1}{2}(\frac{1}{3} - 1) = \frac{1}{3}.$$

e)Đặt $u = 3x - \dfrac{2\pi}{3}$. Khi $x = \dfrac{\pi}{3}$ thì $u = \dfrac{\pi}{3}$, khi $x = \dfrac{2\pi}{3}$ thì $u = \dfrac{4\pi}{3}$.

Ta có $du = 3dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{3}$. Do đó:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos(3x - \frac{2\pi}{3})dx = \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos u du = \frac{1}{3}\sin u \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{3}\left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3.Phương pháp tích phân từng phần.

Định lí . Nếu u(x) và v(x) là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thì:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

hay $\displaystyle\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

Áp dụng công thức trên ta có qui tắc công thức tích phân từng phần sau:

- Bước 1: Viết f(x)dx dưới dạng $udv = uv'dx$ bằng cách chọn một phần thích hợp của f(x) làm u(x) và phần còn lại $dv = v'(x)dx.$
- Bước 2: Tính $du = u'dx$ và $v = \int dv = \int v'(x)dx$.
- Bước 3: Tính $\int_a^b vdu = \int_a^b vu'dx$ và $uv\Big|_a^b$.
- Bước 5: Áp dụng công thức trên.

Ví dụ 5: a)Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$ (ĐH-KB-2009)

$$I = \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx = 3\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)^2} + \int_1^3 \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$$

$$I_1 = 3\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)}\Big|_1^3 = \frac{3}{4}$$

$$I_2 = \int_1^3 \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$$

Đặt u = lnx $\Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$. Chọn $v = \frac{-1}{x+1}$

$$I_2 = -\frac{\ln x}{x+1}\Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{\ln 3}{4} + \int_1^3 \frac{dx}{x} - \int_1^3 \frac{dx}{x+1} = -\frac{\ln 3}{4} + \ln\frac{3}{2}$$

Vậy : $I = \frac{3}{4}(1+\ln 3) - \ln 2$

b) Tính $\int_1^e x\ln x dx$

Giải: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\int_1^e x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$$

Ví dụ 6: Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$ c) $\int_0^1 xe^x dx$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos xdx$

Giải: a) Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^5}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{4x^4} \end{cases}$. Do đó:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx = -\frac{\ln x}{4x^4}\Big|_1^2 + \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{dx}{x^5} = -\frac{\ln 2}{64} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4x^4}\right)\Big|_1^2 = \frac{15 - 4\ln 2}{256}.$$

b) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$. Do đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx = (x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

c)Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$. Do đó:

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

d) Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos xdx = e^x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin xdx.$$

Đặt $\begin{cases} u_1 = e^x \\ dv_1 = \sin xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = e^x dx \\ v_1 = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos xdx = e^{\frac{\pi}{2}} + e^x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos xdx.$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}.$$

*Cách đặt u và dv trong phương pháp tích phân từng phần.

	$\int_a^b P(x)e^x dx$	$\int_a^b P(x)\ln x dx$	$\int_a^b P(x)\cos x dx$	$\int_a^b e^x \cos x dx$
u	P(x)	lnx	P(x)	e^x
dv	$e^x dx$	P(x)dx	cosxdx	cosxdx

Chú ý: Điều quan trọng khi sử dụng công thức tích phân từng phần là làm thế nào để chọn u và $dv = v' dx$ thích hợp trong biểu thức dưới dấu tích phân f(x)dx. Nói chung nên chọn u là phần của f(x) mà khi lấy đạo hàm thì đơn giản, chọn $dv = v' dx$ là phần của f(x)dx là vi phân một hàm số đã biết hoặc có nguyên hàm dễ tìm.

Có ba dạng tích phân thường được áp dụng tích phân từng phần:

- Nếu tính tích phân $\int_\alpha^\beta P(x)Q(x)dx$ mà P(x)là đa thức chứa x và Q(x) là một trong những hàm số: e^{ax}, $\cos ax$, $\sin ax$ thì ta thường đặt

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = Q(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \int Q(x)dx \end{cases}$$

- Nếu tính tích phân $\int_\alpha^\beta P(x)Q(x)dx$ mà P(x) là đa thức của x và Q(x) là hàm số ln(ax) thì ta đặt $\begin{cases} u = Q(x) \\ dv = P(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = Q'(x)dx \\ v = \int P(x)dx \end{cases}$

- Nếu tính tích phân $I = \int_\alpha^\beta e^{ax} \cos bx dx$ hoặc $J = \int_\alpha^\beta e^{ax} \sin bx dx$ thì ta đặt $\begin{cases} u = e^{ax} \\ dv = \cos bx dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ae^{ax} dx \\ v = \dfrac{1}{b}\sin bx \end{cases}$

hoặc đặt $\begin{cases} u = e^{ax} \\ dv = \sin bx dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ae^{ax} dx \\ v = -\dfrac{1}{b}\cos bx \end{cases}$

hoctoan capba.com Trong trường hợp này, ta phải tính tích phân từng phần hai lần sau đó trở thành tích phân ban đầu. Từ đó suy ra kết quả tích phân cần tính.

II.TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

1. Tích phân hàm số phân thức

a)Tính tích phân dạng tổng quát sau:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (a \neq 0).$$

(trong đó $ax^2 + bx + c \neq 0$ với mọi $x \in [\alpha; \beta]$)

Xét $\Delta = b^2 - 4ac$.

+)Nếu $\Delta = 0$ thì $I = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2}$ tính được.

+)Nếu $\Delta > 0$ thì $I = \displaystyle\frac{1}{a}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{(x - x_1)(x - x_2)}$,

(trong đó $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$)

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a(x_1 - x_2)} \ln\left|\frac{x - x_1}{x - x_2}\right| \Bigg|_{\alpha}^{\beta}.$$

+) Nếu $\Delta < 0$ thì $I = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2\right]}$

Đặt $x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}tgt \Rightarrow dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta}{a^2}}\left(1+tg^2t\right)dt$, ta tính được I.

b) Tính tích phân: $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx, \quad (a\neq 0)$**.**

(trong đó $f(x)=\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$)

+) Bằng phương pháp đồng nhất hệ số, ta tìm A và B sao cho:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}$$

+)Ta có I= $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\frac{B}{ax^2+bx+c}dx$

. Tích phân $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx = A\ln\left|ax^2+bx+c\right|\Big|_{\varepsilon}^{\beta}$

Tích phân $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ tính được.

c) Tính tích phân $I=\int_{a}^{b}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ **với P(x) và Q(x) là đa thức của x.**

- Nếu bậc của P(x) lớn hơn hoặc bằng bậc của Q(x) thì dùng phép chia đa thức.
- Nếu bậc của P(x) nhỏ hơn bậc của Q(x) thì có thể xét các trường hợp:

+ Khi Q(x) chỉ có nghiệm đơn $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+...+\frac{A_n}{x-\alpha_n}.$$

+ Khi $Q(x)=\left(x-\alpha\right)\left(x^2+px+q\right), \Delta=p^2-4q<0$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{Bx+C}{x^2+px+q}.$$

+ Khi $Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$ với α ≠ β thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{(x-\beta)^2}.$$

Ví dụ 7. Tính tích phân: $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx$.

Giải:

Cách 1.Bằng phương pháp đồng nhất hệ số ta có thể tìm A, B sao cho:

$$\frac{4x+11}{x^2+5x+6}=\frac{A(2x+5)}{x^2+5x+6}+\frac{B}{x^2+5x+6},\quad \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{-3;-2\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+11}{x^2+5x+6}=\frac{2Ax+(5A+B)}{x^2+5x+6},\quad \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{-3;-2\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2A=4\\5A+B=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=1\end{cases}$$

Vậy $\displaystyle\frac{4x+11}{x^2+5x+6}=\frac{2(2x+5)}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+5x+6},\forall x\in \mathbb{R}\setminus\{-3;-2\}$.

Do đó $\displaystyle\int_0^1\frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx=2\int_0^1\frac{2x+5}{x^2+5x+6}dx+\int_0^1\frac{dx}{x^2+5x+6}$

$$=2\ln\left|x^2+5x+6\right|\Big|_0^1+\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\Big|_0^1=\ln\frac{9}{2}.$$

Cách 2. Vì $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ nên ta có thể tính tích phân trên bằng cách:

Tìm A, B sao cho:

$$\frac{4x+11}{x^2+5x+6}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3},\quad \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{-3;-2\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+11}{x^2+5x+6}=\frac{(A+B)x+3A+B}{x^2+5x+6},\quad \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{-3;-2\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=4\\3A+2B=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3\\B=1\end{cases}$$

Vậy $\dfrac{4x+11}{x^2+5x+6}=\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{1}{x+3},\quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;-2\}$.

Do đó $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx=3\int_0^1\frac{dx}{x+2}+\int_0^1\frac{dx}{x+3}$

$$=3\ln|x+2|\Big|_0^1+\ln|x+3|\Big|_0^1=\ln\frac{9}{2}.$$

Ví dụ 8:Tính tích phân: $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}$.

Giải:

Do $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}=\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

Đặt $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t,\ t\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]\Rightarrow dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)dt$

Vậy $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)dt}{\frac{3}{4}(1+\tan^2 t)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}dt=\frac{2\sqrt{3}}{3}t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Ví dụ 9. Tính tích phân: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^3}{x^2-1}dx$.

Giải:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^3}{x^2-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)dx=\int_1^{\frac{1}{2}}xdx+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{xdx}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}.$$

<u>**2. Tích phân các hàm lượng giác**</u>

2.1.Dạng 1: Biến đổi về tích phân cơ bản

Ví dụ 10: Hãy tính các tích phân sau:

a) $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin 7x dx;$

b) $K = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x(\sin^4 x + \cos^4 x) dx;$

c) $M = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x} dx.$

Giải

a) $J = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 9x dx \quad = \frac{1}{10}\sin 5x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{18}\sin 9x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{45}.$

b) Ta có $\cos x(\sin^4 x + \cos^4 x) = \cos x\left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right]$

$$= \cos x\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) = \cos x\left[1 - \frac{1}{4}(1-\cos 4x)\right] = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos x\cos 4x$$

$$= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{8}(\cos 5x + \cos 3x).$$

$$K = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x(\sin^4 x + \cos^4 x) dx = \frac{3}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \frac{1}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x dx + \frac{1}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{co}\, 3x dx$$

$$= \frac{3}{4}\sin x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{40}\sin 5x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{24}\sin 3x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{40} - \frac{1}{24} = \frac{11}{15}.$$

c) $\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x} = \frac{4\sin^2 x\sin x}{1+\cos x} = \frac{4(1-\cos^2 x)\sin x}{1+\cos x} = 4(1-\cos x)\sin x$

$\Rightarrow M = 2.$

2.2.Dạng 2: Đổi biến số để hữu tỉ hóa tích phân hàm lượng giác

2.2.1.Tính $I = \int \frac{dx}{asinx + b\cos x + c}$

Phương pháp:

Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Ta có: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$I = \int \frac{dx}{asinx + b\cos x + c} = \int \frac{2dt}{(c-b)t^2 + 2at + b + c}$ đã biết cách tính.

Ví dụ 11. Tính $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$

Giải: Đặt $t = tg\frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)dx \Leftrightarrow \frac{2dt}{1+t^2} = dx$

$$\int \frac{dx}{\cos x + 3\sin x + 3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\frac{2t}{1+t^2} + 3} = \int \frac{dt}{t^2 + 3t + 2}$$

$$= \ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + C = \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2} + 1}{\tan\frac{x}{2} + 2}\right| + C.$$

2.2.2. Tính $I = \int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x + d}$

Phương pháp: $I = \int \frac{dx}{(a+d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c+d)\cos^2 x}$

$$= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{(a+d)\tan^2 x + b\tan x + (c+d)}$$

Đặt $t = tgx \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow I = \int \frac{dt}{(a+d)t^2 + bt + (c+d)}$ đã tính được.

Ví dụ 12. Tính: $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x}$.

Giải:Ta có $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{tg^2 x + 2tgx - 3}$

Đặt $t = tgx \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 3} = \int \frac{dt}{(t-1)(t+3)} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+3}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{tgx-1}{tgx+3}\right| + C$ ***2.2.3.***

Tính $I = \int \frac{m\sin x + n\cos x + p}{a\sin x + b\cos x + c}dx$**.**

Phương pháp:

+)Tìm A, B, C sao cho:

$m\sin x + n\cos x + p = A(a\sin x + b\cos x + c) + B(a\cos x - b\sin x) + C, \forall x$+)

Vậy $I = \int \frac{m\sin x + n\cos x + p}{a\sin x + b\cos x + c}dx =$

$= A\int dx + B\int \frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x + c}dx + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$

Tích phân $\int dx$ tính được

Tích phân $\int \frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x + c}dx = \ln|a\sin x + b\cos x + c| + C$

Tích phân $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$ tính được.

Ví dụ 13. Tính: $I = \int \frac{\cos x + 2\sin x}{4\cos x + 3\sin x}dx$.

Giải:

Bằng cách cân bằng hệ số bất định, tìm A và B sao cho:

$\cos x + 2\sin x = A(4\cos x + 3\sin x) + B(-4\sin x + 3\cos x), \forall x$

$\cos x + 2\sin x = (4A + 3B)\cos x + (3A - 4B)\sin x, \forall x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A+3B=1 \\ 3A-4B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{2}{5} \\ B=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$I=\int\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}.\frac{-4\sin x+3\cos x}{4\cos x+3\sin x}\right)dx=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln\left|4\cos x+3\sin x\right|+C.$$

2.3.Dạng 3: Đổi biến số để đưa** về **tích phân hàm lượng giác đơn giản hơn

(Xem ví dụ 17, 20, 21)

2.4.Chú ý: Nguyên hàm dạng $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, với $R(\sin x,\cos x)$là một hàm hữu tỉ theo sinx, cosx

Để tính nguyên hàm trên ta đổi biến số và đa về dạng tích phân hàm hữu tỉ mà ta đã biết cách tính tích phân.

- Trường hợp chung: Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}\Rightarrow dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$

Ta có $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2};\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

- Những trường hợp đặc biệt:

+) Nếu $R(\sin x,\cos x)$là một hàm số chẵn với sinx và cosx nghĩa là

$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$thì đặt $t=tgx$ hoặc $t=\cot gx$, sau đó đưa tích phân về dạng hữu tỉ theo biến t.

+) Nếu $R(\sin x,\cos x)$là hàm số lẻ đối với sinx nghĩa là:

$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$thì đặt $t=\cos x$.

+) Nếu $R(\sin x,\cos x)$là hàm số lẻ đối với cosx nghĩa là:

$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$thì đặt $t=\sin x$.

<u>3.Tích phân hàm vô tỉ</u>

3.1 .Dạng 1: Biến đổi về tích phân vô tỉ cơ bản

Ví dụ 14. Tính tích phân: $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

Giải

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\int_0^1\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx=\frac{2}{3}\left[\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-2\right)$$

Ví dụ 15:Tính tích phân $\int_0^1 \frac{x^3dx}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

Giải: $\int_0^1 \frac{x^3dx}{x+\sqrt{1+x^2}}=\int_0^1 (x^3\sqrt{1+x^2}-x^4)dx=\frac{2\sqrt{2}-1}{15}$.

3.2.Dạng 2: Biến đổi về tích phân hàm lượng giác

(xem ví dụ 2)

3.3Dạng 3: Biến đổi làm mất căn

Gồm: Đổi biến số t là toàn bộ căn thức

Viết biểu thức trong căn dưới dạng bình phương đúng

Ví dụ 15:Tính $$I=\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Giải:

$$I=\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}.xdx$$

Đặt t= $\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow t^2=1-x^2\Leftrightarrow x^2=1-t^2$

Ta có: xdx=-tdt, Khi x= 0 thì t =1,khi x = 1 thì t =0

Vậy $$I=-\int_1^0 (1-t^2)t^2dt=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{15}$$

<u>4.Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối</u>

Phương pháp: Chúng ta phải phá dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ 16: Tính $J=\int_{-2}^{2}\left|x^2-1\right|dx$

Giải: Lập bảng xét dấu của x^2-1 trên đoạn $\left[-2;2\right]$

x	-2 -1 1 2
x^2-1	+ 0 - 0 +

Do đó $I=\int_{-2}^{2}\left|x^2-1\right|dx=\int_{-2}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x^2-1\right)dx$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{1}^{2}=4.$$

III.TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM ĐẶC BIỆT

1.Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và lẻ trên đoạn $\left[-a;a\right]$. Khi đó

$$I=\int_{-a}^{a}f(x)dx=0.$$

Ví dụ 17: Chứng minh $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}=0$.

Giải: Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$. Khi x= $\frac{\pi}{2}$ thì t = - $\frac{\pi}{2}$, khi $x=-\frac{\pi}{2}$ thì $t=\frac{\pi}{2}$

Do đó : I= $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{tdt}{4-\sin^2 t}=-I$

Suy ra : 2I = 0. Ta được $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}=0$.

2.Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và chẵn trên đoạn $[-a; a]$. Khi đó

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Chứng minh : Ta có $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ (1)

Ta tính $J = \int_{-a}^{0} f(x)dx$ bằng cách đặt $x = -t\left(0 \le t \le a\right) \Rightarrow dx = -dt$

$$\Rightarrow J = \int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

Ví dụ 18: Tính tích phân: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x}{4 - \sin^2 x} dx$

Giải: Ta có $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x}{4 - \sin^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{4 - \sin^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} dx$

Do $f_1(x) = \frac{x}{4 - \sin^2 x}$ là hàm số lẻ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{4 - \sin^2 x} dx = 0$

và $f_2(x) = \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x}$ là hàm số chẵn trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên ta có:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} dx = -2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{(\sin x + 2)\left(\sin x + 2\right)}$$

Vậy $I = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 2}{\sin x + 2}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\ln 3.$

3.Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và chẵn trên đoạn$[-\alpha : \alpha]$. Khi đó

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$$

Chứng minh: Đặt t= -x $\Rightarrow$ dt= - dx

Ta có f(x) = f(-t)= f(t); $a^x+1 = a^{-t}+1 = \frac{a^t+1}{a^t}$

Khi x= - α thì t = α ; x = α thì t =- α

Vậy $$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1}dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{a^t f(t)}{a^t + 1}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{a^t + 1 - 1}{a^t + 1} f(t)dt$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(t)}{a^t + 1}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx + I$$

Suy ra $$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$$

Ví dụ 19 : Tính tích phân: $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{2^x + 1}dx$.

Giải:Đặt t= -x $\Rightarrow$ dt= - dx

Khi x= - 1 thì t = 1 ; x =1 thì t =-1

Vậy $$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{2^x + 1}dx = \int_{-1}^{1} \frac{t^4}{2^{-t} + 1}dt = \int_{-1}^{1} \frac{2^t}{2^t + 1} t^4 dt$$

$$= \int_{-1}^{1} t^4 dt - \int_{-1}^{1} \frac{t^4}{2^t + 1}dt = \int_{-1}^{1} x^4 dx - I$$

Suy ra $$I == \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{1}{2}\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{5}$$

4.Cho f(x) liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ **.Khi đó**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

Chứng minh:

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$

Khi x = 0 thì $t = \frac{\pi}{2}$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì t = 0

Do đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\frac{\pi}{2} - t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$

Nhận xét : Bằng cách làm tương tự ta có các công thức

**Nếu f(x) liên tục trên* $[0;1]$ *thì* $\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} f(\sin x)dx$

**Nếu f(x) liên tục trên* $[0;1]$ *thì* $\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} xf(\cos x)dx = \pi\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} f(\cos x)dx$

Ví dụ 20: Chứng minh: I=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx = \frac{\pi}{4}$.

Giải :

Tương tự như trên ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx = J$$

+) Vậy I+J= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx = \frac{\pi}{2}$

Vậy I= $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 21: Tính tích phân: $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

Giải: Đặt $x = \pi - t \left(0 \le t \le \pi\right) \Rightarrow dx = -dt$.

$$\text{Khi đó} \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx = -\int_{\pi}^{0} \frac{\left(\pi - t\right)\sin\left(\pi - t\right)}{1+\cos^2\left(\pi - t\right)} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin t}{1+\cos^2 t} dt - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x} dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

Vậy $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.Tính các tích phân sau

$a) I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$

(ĐH-KA-2006)

$b) I = \displaystyle\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\sin\sqrt{x} dx$

$c) I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$

(ĐH-KA-2005)

$d) I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos^2 x.dx$

$e) I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x.\cos x}{1+\cos x} dx$

(ĐH-KB-2005)

$f) I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx$

$g) I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx$

$h) I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$

$i) I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{(\sin x - \cos x + 3)^3} dx$

$k) I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x.dx$

Bài 2.Tính các tích phân sau

$a) I = \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^5 + 2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$

$b) I = \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$

$c) I = \int_{0}^{4} \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} dx$

$d) I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$

$e) I = \int_{1}^{3} x^3.\sqrt{x^2-1}dx$

$f) I = \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x+x^3}$

$g) I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

$h) I = \int_{-3}^{5} (|x+2| - |x-2|)dx$

Bài 3. Tính các tích phân sau

$a) I = \int_{0}^{1} (x^2+1)e^x dx$

$b) I = \int_{1}^{2} \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$

$c) I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1+e^x}$

$d) I = \int_{1}^{e} \frac{x^3+1}{x} \ln x.dx$

$e) I = \int_{0}^{2} \frac{x^2.e^x}{(x+2)^2} dx$

$f) I = \int_{2}^{3} \ln(x^2 - x).dx$

$g) I = \int_{-1}^{0} x(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1})dx$

$h) I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x)\cos x.dx$